MEJORAMIENTO ANIMAL - ANEXO T.P. # 8
SELECCIÓN - INDICES

Como derivar expresiones algebraicas correspondientes a los coeficientes de regresión parcial para la siguiente información en un índice de selección para mejorar una única característica:

n_1 mediciones en uno de los progenitores de cada candidato
n_2 mediciones en el otro progenitor

a partir de esos datos se derivará una expresión para r_{VI}

➔ X_1 = Padres $\qquad$ $\overline{X}_1 =$ Media de los padres
X_2 = Candidatos (hijos) $\qquad$ $\overline{X}_2 =$ Media de los candidatos

Podemos expresar esa información como ecuaciones, que en forma matricial quedaría:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\overline{X}_1}{}^2 & \sigma_{\overline{X}_1\overline{X}_2} \\ \sigma_{\overline{X}_1\overline{X}_2} & \sigma_{\overline{X}_2}{}^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}\,(\mathrm{Inf}, \mathrm{Valor})_1 \\ \mathrm{Cov}\,(\mathrm{Inf}, \mathrm{Valor})_2 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal ➔ Varianzas
Diagonal segunda ➔ Covarianzas
b_1 y b_2 ➔ Incógnitas

$$\mathrm{Cov}\,(\mathrm{Inf},\ \mathrm{Valor})_1 = \mathrm{Cov}\,(\overline{X}_1, \sigma_{10_1}) = \mathrm{Cov}\,(\sum_{i=1}^{n_1} \frac{X_{i1}}{n_1}, \sigma_{10_1})$$

Donde: $\overline{X}_1 = \sigma_{10_1} + R$
σ_{10_1}: Valor genético aditivo, reproductivo o de cría

➔ $$\mathrm{Cov}\,(\mathrm{Inf},\ \mathrm{Valor})_1 = \mathrm{Cov}\,(\sigma_{10} + R, \sigma_{10}) = a_{XY}\ \sigma^2_{10}$$

Donde: a_{XY}: Relación de parentesco

$$\therefore \quad \begin{aligned} \mathrm{Cov}\,(\mathrm{Inf}, \mathrm{Valor})_1 &= \tfrac{1}{2}\,\sigma_{10}{}^2 \\ \mathrm{Cov}\,(\mathrm{Inf}, \mathrm{Valor})_2 &= \sigma_{10}{}^2 \end{aligned}$$

Supuestos:

- Los padres no son parientes entre sí, por lo tanto la covarianza entre ellos es cero (0)
- Las covarianzas entre progenitores e hijos es = ½ σ_{10}^2
- Las varianzas de las medias: $\sigma_{\overline{X}_1}^2 = \alpha_1 \, . \, \sigma_X^2$

Donde: $\alpha_1 = \dfrac{(1+(n_1-1)r}{n_1}$

Entonces la matriz quedaría:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \, \sigma_X^2 & \dfrac{\sigma_{10}^2}{2} \\ \dfrac{\sigma_{10}^2}{2} & \alpha_2 \, \sigma_X^2 \end{bmatrix} \;\mathrm{X}\; \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_{10}^2}{2} \\ \sigma_{10}^2 \end{bmatrix}$$

Esto significa que: $b_1 \left(\alpha_1 \, \sigma_X^2 \right) + b_2 \left(\dfrac{\sigma_{10}^2}{2} \right) = \dfrac{\sigma_{10}^2}{2}$

y que: $b_1 \left(\dfrac{\sigma_{10}^2}{2} \right) + b_2 \left(\alpha_2 \, \sigma_X^2 \right) = \sigma_{10}^2$

Como: $\sigma_{10}^2 = h^2 . \sigma_X^2$

$$\Rightarrow \quad b_1 \left(\alpha_1 \, \sigma_X^2 \right) + b_2 \left(\frac{h^2 . \sigma_X^2}{2} \right) = \frac{h^2 . \sigma_X^2}{2}$$

$$\therefore \quad b_1 \, . \, \alpha_1 + b_2 \, . \, \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{2} \qquad \text{(a)}$$

y $\boxed{b_1 = \dfrac{h^2/2 \, - \, b_2 \, . h^2/2}{\alpha_1}}$

además $$b_1\left(\frac{h^2.\sigma_X{}^2}{2}\right)+b_2\left(\alpha_2\,\sigma_X{}^2\right)=h^2.\sigma_X{}^2$$

$$\therefore \quad b_1\,.\frac{h^2}{2}+b_2\,.\,\alpha_2=h^2 \qquad \text{(b)}$$

y $$\boxed{b_2=\frac{h^2 - b_1\,.\,h^2/2}{\alpha_2}}$$

Estamos ante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Reemplazando b_1 en (b):

$$\left(\frac{h^2/2-b_2\,.h^2/2}{\alpha_1}\right).\frac{h^2}{2}+b_2\,.\,\alpha_2=h^2$$

$$\frac{\left(h^2/2\right)^2}{\alpha_1}-\frac{b_2\,.\left(h^2/2\right)^2}{\alpha_1}+b_2\,.\,\alpha_2\,.\frac{\alpha_1}{\alpha_1}=h^2$$

$$\left(h^2/2\right)^2-b_2\,.\left(h^2/2\right)^2+b_2\,.\,\alpha_2\,.\,\alpha_1=h^2\,.\,\alpha_1$$

$$b_2\,.\left(\alpha_2\,.\,\alpha_1-\left(h^2/2\right)^2\right)=h^2\,.\,\alpha_1-\left(h^2/2\right)^2$$

$$\therefore \quad \boxed{b_2=\frac{h^2\,.\,\alpha_1-\left(h^2/2\right)^2}{\alpha_1\,.\,\alpha_2-\left(h^2/2\right)^2}}$$

Siguiendo un procedimiento similar:

$$\boxed{b_1=\frac{h^2/2\,\left(\alpha_2-h^2\right)}{\alpha_1\,.\,\alpha_2-\left(h^2/2\right)^2}}$$

Se puede llegar al mismo resultado utilizando la Regla de Sarrus, que es útil en caso de tener un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Según la Regla de Sarrus, podemos obtener la expresión algebraica correspondiente al 1[er] coeficiente (b_1) conformando una matriz modificada en la cual la 1[er] columna es reemplazada por el vector RHS; ya que Sarrus dice que:

$$b_1 = \frac{|\text{Matriz modificada}|}{|\text{Matriz original}|}$$

b_1 es igual al DETERMINANTE de la matriz modificada sobre el DETERMINANTE de la matriz original

➔ Matriz modificada: $M_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{10}{}^2/2 & \sigma_{10}{}^2/2 \\ \sigma_{10}{}^2 & \alpha_2\, \sigma_X{}^2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \qquad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_{10}{}^2/2 & \sigma_{10}{}^2/2 \\ \sigma_{10}{}^2 & \alpha_2\, \sigma_X{}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1\, \sigma_X{}^2 & \sigma_{10}{}^2/2 \\ \sigma_{10}{}^2/2 & \alpha_2\, \sigma_X{}^2 \end{vmatrix}}$$

Siendo $|D|$ el determinante de una matriz de 2 x 2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$➔ \qquad |D| = (a.d - b.c)$$

$$\therefore \qquad |M_1| = \frac{\sigma_{10}{}^2}{2} \cdot \alpha_2 \cdot \sigma_X{}^2 \; - \; \frac{\sigma_{10}{}^2}{2} \cdot \sigma_{10}{}^2$$

$$\text{y} \qquad |O| = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \sigma_X{}^2 \cdot \sigma_X{}^2 \; - \; \left(\frac{\sigma_{10}{}^2}{2} \right)^2$$

Como: $\sigma_{10}{}^2 = h^2 . \sigma_X{}^2$

$$➔ \qquad |M_1| = \frac{h^2}{2} \cdot \alpha_2 \cdot \left(\sigma_X{}^2\right)^2 \; - \; \frac{\left(h^2\right)^2}{2} \cdot \left(\sigma_X{}^2\right)^2 = \left(\sigma_X{}^2\right)^2 \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \left(\alpha_2 - h^2\right)$$

y $$|O| = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \left(\sigma_X{}^2\right)^2 - \left(\frac{h^2 \cdot \sigma_X{}^2}{2}\right)^2 = \left(\sigma_X{}^2\right)^2 \cdot \left(\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \left(\frac{h^2}{2}\right)^2\right)$$

De esto: $$b_1 = \frac{\left(\sigma_X{}^2\right)^2 \cdot h^2/2 \cdot \left(\alpha_2 - h^2\right)}{\left(\sigma_X{}^2\right)^2 \cdot \left(\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \left(h^2/2\right)^2\right)}$$

$$\boxed{b_1 = \frac{h^2/2 \cdot \left(\alpha_2 - h^2\right)}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \left(h^2/2\right)^2}}$$

Siguiendo un procedimiento similar:

$$\boxed{b_2 = \frac{\alpha_1 \cdot h^2 - \left(h^2/2\right)^2}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \left(h^2/2\right)^2}}$$

Derivar una expresión para r_{VI} (correlación entre objetivo e índice)

$$r_{VI} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sigma_{VX_i}}{\sigma_V{}^2}}$$

donde: $$\sigma_{VX_i} = \mathrm{Cov}\,(V, X_i) = a_{XY}\,(h^2 \cdot \sigma_X{}^2)$$

y $$V = \text{Objetivo} \quad \Rightarrow \quad \sigma_V{}^2 = \sigma_{10}{}^2 = h^2 \cdot \sigma_X{}^2$$

$$\therefore \qquad r_{VI} = \sqrt{\frac{b_1 \cdot \frac{1}{2} h^2 \cdot \sigma_X{}^2 + b_2 \cdot h^2 \cdot \sigma_X{}^2}{h^2 \cdot \sigma_X{}^2}}$$

➔ $$\boxed{r_{VI} = \sqrt{\tfrac{1}{2} b_1 + b_2}}$$