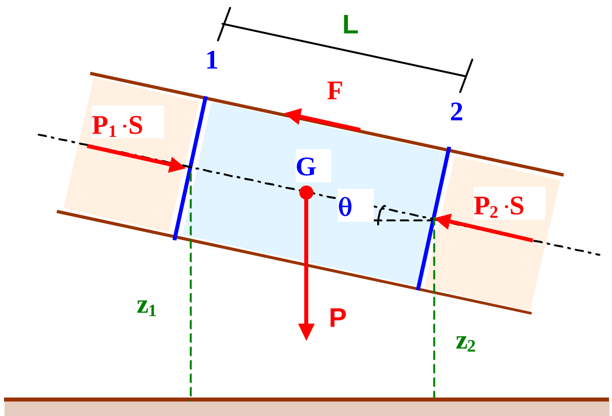
Tema 5. Pérdidas de carga por rozamiento en tuberías

1. Ecuación general de Darcy – Weisbach
2. Rugosidad absoluta y rugosidad relativa
3. Diferentes expresiones de las pérdidas de carga continuas
4. Velocidad de fricción y número de Reynolds de la rugosidad

1. Ecuación general de Darcy-Weisbach.

Suponemos una tubería por la que circula un líquido incompresible de peso específico γ, y en ella el volumen comprendido entre las secciones 1 y 2, separadas una distancia L.

El elemento de tubería considerado forma un ángulo θ respecto a la horizontal.



Las fuerzas que actúan sobre este volumen son:

⇨ Peso de la masa del líquido (P), aplicado en el cdg (G):

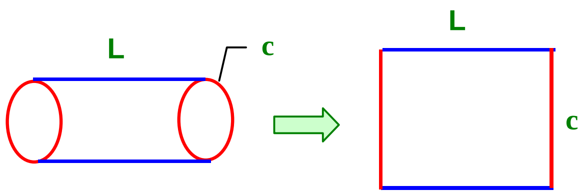
$$P = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot S \cdot L \cdot g = S \cdot L \cdot \gamma$$

⇨ Fuerzas de presión ($P_1 \cdot S$ y $P_2 \cdot S$), que sería la fuerza que ejerce el resto del líquido sobre las secciones 1 y 2, respectivamente.

⇨ Fuerza de rozamiento (F), en sentido contrario al movimiento y debida al rozamiento (τ) del líquido con las paredes de la tubería.

$$F = \tau \cdot \text{Superficie con la que roza}$$

La superficie lateral del cilindro considerado es un rectángulo de base L y altura c, siendo c el perímetro de la sección circular.



$$F = \tau \cdot c \cdot L$$

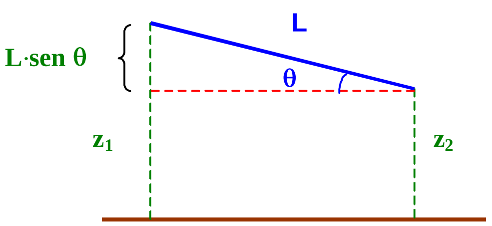
Proyectando sobre el eje hidráulico las fuerzas que actúan sobre el cilindro considerado:

$$P_1 \cdot S - P_2 \cdot S + S \cdot L \cdot \gamma \cdot \operatorname{sen}\theta = \tau \cdot c \cdot L$$

Dividiendo por $S \cdot \gamma$:

$$\frac{P_1 \cdot S}{S \cdot \gamma} - \frac{P_2 \cdot S}{S \cdot \gamma} + \frac{S \cdot L \cdot \gamma \cdot \operatorname{sen}\theta}{S \cdot \gamma} = \frac{\tau \cdot c \cdot L}{S \cdot \gamma}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} + L \cdot \operatorname{sen}\theta = \frac{\tau \cdot c \cdot L}{S \cdot \gamma}$$



$$L \cdot \operatorname{sen}\theta = z_1 - z_2$$

$$\left(\frac{P_1}{\gamma}+z_1\right)-\left(\frac{P_2}{\gamma}+z_2\right)=\frac{\tau\cdot c\cdot L}{S\cdot\gamma}$$

El primer miembro de la igualdad, $\left(\frac{P_1}{\gamma}+z_1\right)-\left(\frac{P_2}{\gamma}+z_2\right)$, es la diferencia de las alturas piezométricas entre los puntos 1 y 2, es decir, la *pérdida de carga* que se produce en ese trayecto.

Entonces, $h_c=\frac{\tau\cdot c\cdot L}{S\cdot\gamma}$ **[1]**

Se comprueba experimentalmente que $\tau=\lambda\cdot\rho\cdot\frac{v^2}{2}$, siendo λ un factor de proporcionalidad adimensional conocido como *coefiente de Fanning*.

Además, el radio hidráulico es $R=\frac{S}{c}$ y como $\gamma=\rho\cdot g\rightarrow g=\frac{\gamma}{\rho}$

Introduciendo estos valores en [1]:

$$h_c=\frac{\tau\cdot c\cdot L}{S\cdot\gamma}=\lambda\cdot\rho\cdot\frac{v^2}{2}\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{L}{\gamma}=\frac{\lambda}{R}\cdot\frac{v^2}{2\cdot g}\cdot L$$

En tubería cilíndrica, $R=\frac{\pi\cdot\frac{D^2}{4}}{\pi\cdot D}=\frac{D}{4}$, por lo que $h_c=4\cdot\lambda\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{v^2}{2\cdot g}$

Llamando $4\cdot\lambda=f$, *coeficiente de fricción de Darcy – Weisbach*

$h_c=f\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{v^2}{2\cdot g}$ que es la ***ecuación general de Darcy-Weisbach***

La pérdida de carga por unidad de longitud será:

$$J=\frac{h_c}{L}=f\cdot\frac{1}{D}\cdot\frac{v^2}{2\cdot g}$$

La pérdida de carga continua es directamente proporcional a la velocidad del líquido y a la longitud del tramo de tubería que estamos considerando, e inversamente proporcional a su diámetro.

El factor de fricción (f) es adimensional y es función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa de la tubería, parámetro que da idea de la magnitud de las asperezas de su superficie interior:

$$f = f\left(R_e, \frac{K}{D}\right)$$

Es un hecho demostrado que la rugosidad relativa no influye sobre f en régimen laminar ($R_e < 2000$), ya que el rozamiento se debe fundamentalmente a la fricción de unas capas de fluido sobre otras y no de éstas sobre las paredes de la tubería. Sin embargo, para $R_e > 2000$ las cosas cambian y la rugosidad relativa adquiere notable importancia, como veremos posteriormente.

La ecuación de Darcy – Weisbach puede ponerse en función del caudal circulante, ya que el caudal que fluye por una conducción circular a plena sección está ligado al diámetro y a la velocidad media por la relación:

$$Q = v \cdot S = v \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Darcy – Weisbach:

$$h_c = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{16 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot D^4} \cdot \frac{1}{2 \cdot g}$$

Operando el término constante $\frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot g} = 0.0826$, la ecuación quedaría:

$$h_c = 0.0826 \cdot f \cdot \frac{Q^2}{D^5} \cdot L$$

Que es la ***ecuación de Darcy-Weisbach en función del caudal***

La pérdida de carga por unidad de longitud será:

$$J = \frac{h_c}{L} = 0.0826 \cdot f \cdot \frac{Q^2}{D^5}$$

Se deduce que *un aumento en el caudal o un aumento en la velocidad del líquido implica un aumento en la pérdida de carga, mientras que diámetro y pérdida de carga están inversamente relacionados*.

2. Rugosidad absoluta y rugosidad relativa.

En el interior de los tubos comerciales existen protuberancias o irregularidades de diferentes formas y tamaños cuyo valor medio se conoce como *rugosidad absoluta* (K), y que puede definirse como *la variación media del radio interno de la tubería*.

Los experimentos de Nikuradse permitieron determinar el valor de esta rugosidad absoluta. Consistieron en producir una rugosidad artificial pegando en el interior de un tubo de vidrio (liso) áridos de diferentes granulometrías tamizados, es decir, de rugosidad conocida, hasta conseguir una pérdida de carga igual que la producida en un tubo comercial de un material determinado con igual longitud y diámetro que el de vidrio. Estos tubos artificialmente preparados se conocen como *tubos arenisca*.

Cuando una casa comercial da el valor de rugosidad K es en realidad la *rugosidad media equivalente*, lo que significa que se comporta del mismo modo que una tubería artificialmente preparada con la rugosidad absoluta K.

Un mismo valor de rugosidad absoluta puede ser muy importante en tubos de pequeño diámetro y ser insignificante en un tubo de gran diámetro, es decir, la influencia de la rugosidad absoluta depende del tamaño del tubo. Por ello, para caracterizar un tubo por su rugosidad resulta más adecuado utilizar la *rugosidad relativa* (ε), que se define como *el cociente entre la rugosidad absoluta y el diámetro de la tubería*.

$$\varepsilon = \frac{K}{D}$$

3. Diferentes expresiones de las pérdidas de carga continuas.

Las pérdidas de carga por rozamiento en tuberías a presión pueden calcularse mediante dos grupos de fórmulas:

1. Fórmulas logarítmicas
2. Fórmulas empíricas

Aunque en general las fórmulas logarítmicas tienen mayor precisión que las empíricas, algunas de éstas proporcionan una suficiente aproximación. En cualquier caso, es necesario conocer el tipo de flujo existente en la tubería, ya que, excepto la expresión logarítmica de White-Colebrook, cada fórmula es válida para un determinado régimen hidráulico. Por ello se debe comprobar que el número de Reynolds correspondiente a las condiciones del problema se encuentra dentro del intervalo de validez de la fórmula.

Mediante las *fórmulas logarítmicas*, de aplicación en régimen turbulento, se calcula el coeficiente de fricción (f) para su introducción en la ecuación general de Darcy – Weisbach.

Las *fórmulas empíricas* han sido deducidas experimentalmente para los distintos materiales y responden a la forma $h_c = c \cdot Q^{\alpha} \cdot D^{-\beta} \cdot L$, es decir, $h_c \sim v^{\beta}$, siendo $1.75 < \beta < 2$.

La ecuación de Hagen–Poiseuille para régimen laminar, $h_c = \frac{32 \cdot \mu \cdot L \cdot v}{\gamma \cdot D^2}$, fue deducida experimentalmente por el ingeniero alemán Hagen y, de forma independiente, por Poiseuille, que publicaron los resultados de sus trabajos en

1939 y 1940, respectivamente. Posteriormente, en 1956, Wiedemann la dedujo de forma analítica.

Las fórmulas logarítmicas y empíricas se estudian en los temas 6 y 7, respectivamente.

4. Velocidad de fricción y Nº de Reynolds de la rugosidad.

Se define como velocidad de fricción (v^*, v_f) a la raíz cuadrada del cociente entre el esfuerzo tangencial en las paredes de la tubería (τ_0) y la densidad del líquido (ρ).

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

A su vez, $\tau_0 = \gamma \cdot R \cdot J$

$$\gamma = \rho \cdot g$$

$$R = \frac{S}{c} = \frac{D}{4} \quad \text{(sección circular)}$$

$$J = f \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$v^* = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot J}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho \cdot g \cdot \frac{D}{4} \cdot f \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}}{\rho}} = \sqrt{f \cdot \frac{v^2}{8}} = v \cdot \sqrt{\frac{f}{8}}$$

$$v^* = v \cdot \sqrt{\frac{f}{8}}$$

Se denomina Nº de Reynolds de la rugosidad $(Re)_r$ a la expresión adimensional:

$$(Re)_r = \frac{v^* \cdot K}{\upsilon}$$

siendo $\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosidad cinemática del líquido a la temperatura considerada y K la rugosidad absoluta de la tubería.

$$\text{Como } Re = \frac{v \cdot D}{\upsilon} \rightarrow \frac{v}{\upsilon} = \frac{Re}{D}$$

$$v^* = v \cdot \sqrt{\frac{f}{8}}$$

$$\text{luego } (Re)_r = \frac{v^* \cdot K}{\upsilon} = v \cdot \sqrt{\frac{f}{8}} \cdot \frac{K}{\upsilon} = \frac{Re}{D} \cdot \sqrt{\frac{f}{8}} \cdot K$$

$$(Re)_r = Re \cdot \frac{K}{D} \cdot \sqrt{\frac{f}{8}}$$

El Nº de Reynolds de la rugosidad es el producto de los tres parámetros fundamentales del flujo en tuberías a presión. Interviene en algunos ábacos para la determinación gráfica del coeficiente de fricción (f).